



SAISTOŠĀ ALGEBRA

ALGĒBRA

Guntis Deksnis

SAISTOŠĀ ALGĒBRA

UDK 51 (075.2)
De268

Mākslinieks Ilze Ramane



© Guntis Deksnis, 2007

© Ilze Ramane, mākslinieciskais noformējums, 2007

© SIA "Drukātava", 2007

ISBN 978-9984-798-14-1

SATURS

PRIEKŠTITULS	1
TITULS	3
1. JA ALGEBRA NAV GARLAICĪGA, TAD TĀ IR JAUKA	9
Algebras priekšmets	9
Matricas un determinanti	10
Substitūcijas	11
Cikli substitūcijās	14
Substitūcijas kārtā	15
Trešās kārtas determinanta aprēķins	16
Determinanta definīcija	17
2. AICINĀJUMS UZ AKTĪVU DARBĪBU	19
Būla matricas, Būla algebra	19
Būla matricu transponēšana, transponēto matricu reizināšana	21
Parastās matricas	21
Matricu saskaitīšana un reizināšana ar skalāru	25
Vai Gauss nav gauss?	26
Lineāras vienādojumu sistēmas risināšana ar Gausa metodi	27
Matricas invertēšana ar Gausa metodi	28
3. IZVIRZĪT UN IZVIRZĪTIES	31
Determinanta izvīrējums pēc vienas rindas (kolonas)	31
Determinanta izvīrējums pēc vairākām rindām (kolonām)	32
Apgrieztais matricas aprēķins ar algebriskajiem papildinājumiem	35
Matricu vienādojuma risināšana	37
4. ŽORDĀNA IZSLĒGŠANA, KRĀMERA FORMULAS	40
Modificētā Žordāna izslēgšanas metode	40
Lineāri atkarīgi vai lineāri neatkarīgi vektori?	43
KrāmERA formulas	48
Kā palīdzēt misionāriem?	50

5. UZRODAS GRUPA	52
Jēdziens par grupu	52
Trijstūru pašsavietojumu grupa	53
Substitūciju grupas S_n pāra substitūciju apakšgrupa A_n	55
Sešstūris Paskāla trijstūrī	56
Determinanta aprēķins	58
Varbūtības jēdziens un varbūtību koks	59
6. RĒĶINĀT UN APRĒĶINĀT	63
Determinanta aprēķins	63
Matricas rangs	64
Pierādījums, izmantojot matemātisko indukciju	65
Pierādījums no pretējā	65
Vai ir grupa?	66
Idempotenta matrica	67
Krustskaitļu uzdevums	67
7. SKAITĻI UN VĒRTĪBAS	69
Fibonači skaitļi	69
Velga, Zane vai Monika	71
Permutācijas ar atkārtojumiem	72
Kombinācijas ar atkārtojumiem	72
8. SKAITĪT UN REIZINĀT	75
Katalana skaitļi	75
Determinanta ģeometriskā interpretācija	79
Dažādu skaitļu kopu apzīmējumi	79
Skalārais un vektoriālais reizinājums	80
Jakobi identitāte	82
Jauktais reizinājums	82
9. JĒDZIENS PAR KOMPLEKSĀJIEM SKAITĻIEM	85
Komplekso skaitļu trigonometriskā forma	85
Komplekso skaitļu saskaitīšana un reizināšana	87
Komplekso skaitļu dalīšana	90
Kāpināšana un saknes vilkšana	90
Ģeometriskā interpretācija darbībām ar skaitļiem	91
Eilera formula	91
Saisītā kompleksā lieluma trigonometriskā forma	92
Trigonometriskās sakarības	92

Vēl par kompleksajiem skaitļiem	93
10. ĪPAŠAS VĒRTĪBAS, ĪPAŠVĒRTĪBAS	95
Par īpašvērtībām	95
Vjeta teorēma un īpašvektors	99
Tuvināts algoritms īpašvērtības meklēšanai	101
Par galda tēmu	102
11. LĪDZĪBAS MEKLĒJUMOS	104
Kanoniskā matrica	104
Līdzīgās matricas	106
Debora šauj	109
12. TRANSPONĒT, PAGRIEZT	110
Transponēto matricu likumsakarības	110
Transponēto matricu lietošana	110
Aritmētikas pamatteorēma	113
Eiklīda algoritms	114
Veidot lineāro kombināciju	114
Izteikt determinantu	115
Atkal šauj	117
13. PAGRIEZT KOORDINĀTU ASIS	119
Kvadrātiskas formas pārveidojums kanoniskajā veidā	119
Transformācija kanoniskajā veidā	122
14. LAUKĀ	125
Algebriska struktūra	125
Atbilstība starp grupām	126
Kas ir lauks?	126
Skaitliski gredzeni un lauki	127
Gredzenu piemēri	127
15. GREDZENĀ	130
Gredzenu piemēri	130
Pakāpes kopa kā gredzens	134
Viegls uzdevums	135
Atjautības spodrināšana	136

16. VAI REŽĢIS IR SAREŽĢĪTS?	139
Režģis vispārīga rakstura objektu sistēmai	139
Daļējs sakārtojums	141
Hasses diagramma	142
Par lielāko un mazāko elementu	145
Augšējais un apakšējais sliekšnis apakškopai	146
Suprēms un infims apakškopai	147
Atgriežamies pie režģa	148
Ciparu paklājs	148
Uzdevuma risinājums	149
Negals ar zeķēm	151
LITERATŪRAS SARAKSTS	152

1. | JA ALGEBRA NAV GARLAICĪGA, TAD TĀ IR JAUKA

Jo cāļus skaita rudenī,
Zivis dzīvo ūdenī,
Putni lido debesīs –
Viens, divi, trīs...

/Populāru melodija /

Man vienalga, kā to sauc –
Var jau arī par mīlestību...

/Māris Čaklais/

Algebras priekšmets

Sākotnēji algebra bija matemātikas sadaļa, kas nodarbojās ar vienādojumu risināšanu. Atšķirībā no ģeometrijas algebrā aksiomātiskās uzbūves nebija līdz 19. gs. vidum. Tad radās principiāli jauns skats uz algebras priekšmetu un tās raksturu. Sāka vairāk pētīt tā saucamās algebriskās struktūras. Šādai pieejai bija divas priekšrocības. No vienas puses, precizēti tika apgabali, kuriem izpildās atsevišķas teorēmas. No otras puses, radās iespēja izmantot vienus un tos pašus pierādījumus pilnīgi atšķirīgos apgabalos. Tāds algebras sadalījums eksistēja līdz 20. gs. vidum, un tas atrada savu izteiksmi tajā, ka radās divi nosaukumi: “klasiskā algebra” un “mūsdienu algebra”. Pēdējo vairāk raksturo cits nosaukums: “abstraktā algebra”. Šai sadaļai – pirmoreiz matemātikā – raksturīga pilnīga abstrakcija. Pierādot atsevišķas teorēmas abstraktajā algebrā, neņem vērā pat objektu matemātiskās īpašības. Precīzāk izsakoties, apskata tikai tās formālās īpašības, kas nepieciešamas teorēmas pierādījumā. Šīs īpašības pieņem pēc tam par aksiomām. Tieši tāpēc iegūtās teorēmas izrādās patiesas jebkurā sistēmā, kurā izpildās pieņemtās aksiomas. Sākot no 20. gs. vidus, sadaļu, ko dēvē par

mūsdienu algebru, sāka saukt par abstrakto algebru vai vienkārši par algebru. Šajā laikā sāka parādīties jauni virzieni, kuros apskatīja ne atsevišķas struktūras, bet struktūru tipus; šis jaunais atzars ieguva mūsdienu algebras nosaukumu.

Lūk, kā ilggadīgs LU mācībspēks Dr. Vilnis Detlovs (1923-2007) raksturo *lineāro algebru* /2/. “Lineāro algebru dēvē par matemātikas nozari, kurai ir vislielākais skaits pielietojumu: gan dažādās matemātikas disciplīnās, gan citās zinātnēs – pirmkārt, fizikā, – gan tīri praktiskos inženieruzdevumos. Tiklab vēsturiski kā loģiski lineārā algebra izaugusi no vienas uzdevumu klases – lineāro vienādojumu sistēmu risināšanas. Taču tas ir novedis turpmāk pie daudzdimensiju vektoru telpas un pie tenzoru teorijas.”

V. Detlovs arī saka, ka matricu valoda “ieved mūs īstajā lineārās algebras valstībā”.

Matricas un determinanti

Jau mācoties vidusskolas algebras kursu, iepazīnāties ar jēdzienu par *matricām* un *determinantiem*.

Matemātikā ļoti bieži sastopas ar skaitļiem, kas izvietoti pēc noteiktas shēmas. Par *matricu* sauc skaitļu izvietojumu taisnstūra tabulas veidā (tabulu ietver iepaļas iekavas):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix}.$$

Ja $n = k$, tad mums ir n -tās kārtas *kvadrātiskā matrica*.

Skaitļus, kas atrodas matricā (to skaits vispārīgajā gadījumā ir vienāds ar $(n \times k)$), sauc par *matricas elementiem*. Šie skaitļi var būt reāli skaitļi, kompleksi skaitļi, veseli skaitļi utt. Tad arī pašu matricu sauc, respektīvi, par reālo skaitļu, komplekso skaitļu,